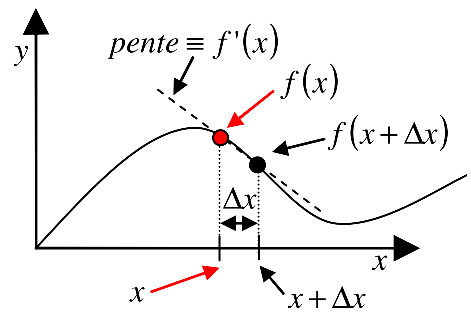
Chapitre 3.1 – La dérivée d'un polynôme

La dérivée

La dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ est égale à la variation de la fonction $\Delta f(x)$ divisée par la variation du paramètre libre Δx lorsque ce dernier tend vers une valeur très près de zéro. Puisque cette définition fait intervenir le rapport $\Delta f / \Delta x$, on peut affirmer que la dérivée génère une fonction qui évalue la pente en tout point x de la fonction primitive $f(x)$:



$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

où $f'(x)$: Fonction qui donne la valeur de la pente en tout point de la fonction primitive $f(x)$.

$f(x)$: Fonction primitive associé au paramètre libre x.

x : Paramètre libre de la fonction $f(x)$ et $f'(x)$.

Δx : Variation infinitésimale du paramètre x.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$: Expression désignant que l'expression Δx est près de zéro sans y être égale.

La dérivée du polynôme x^2

La dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est égale à $f'(x) = 2x$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} = 2x$$

<u>Preuve :</u>

Appliquons la définition de la dérivée sur la fonction $f(x) = x^2$ à partir de la limite :

<u>Fonction en x :</u> $f(x) = x^2$

<u>Fonction en $x + \Delta x$:</u> $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right] - \left[x^2\right]}{\Delta x} \qquad \text{(Remplacer)}$$

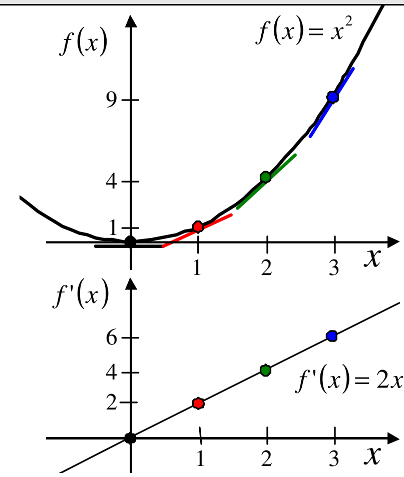
$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \qquad \text{(Simplifier } x^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \qquad \text{(Simplifier } \Delta x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x \quad \blacksquare \qquad (\Delta x \to 0)$$

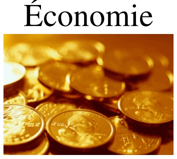
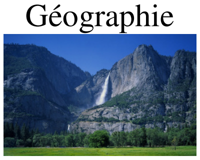
Représentation graphique de la dérivée de la fonction x^2

Voici la représentation de la fonction $f(x) = x^2$ et la dérivée $f'(x) = 2x$ sous forme d'un tableau et sous forme d'un graphique :

Coordonnée x	Valeur de $f(x) = x^2$	Valeur de la pente de la fonction $f(x) = x^2$ ($f'(x) = 2x$)	Représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$
-3	9	-6	
-2	4	-4	
-1	1	-2	
0	**0**	**0**	
1	**1**	**2**	
2	**4**	**4**	
3	**9**	**6**	

Situations concrètes avec la dérivée

Puisque la dérivée correspond au taux de variation d'une fonction, voici quelques exemples concret où le concept de dérivée peut être pertinent à utiliser :

Situation	Fonction de base	Dérivée de la fonction
Économie 	$\$(t)$ en dollar Argent dans un compte en fonction du temps	$\$'(t) = \frac{\mathrm{d}\$(t)}{\mathrm{d}t}$ en dollar/s Le taux d'accroissement ou du compte
Géographie 	$H(x)$ en m La hauteur d'une montage en fonction d'une distance horizontale	$H'(x) = \frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}$ en % L'inclinaison de la montagne.
Cinématique 	$x(t)$ en m La position d'un objet en fonction du temps	$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ en m/s La vitesse de l'objet

La dérivée d'un polynôme

Lorsque la fonction $f(x)$ est purement un polynôme, il existe des trucs de calcul pouvant éviter l'utilisation de la longue formule. Voici les règles à suivre :

1) **Distributivité** ($A(x+y) = Ax + Ay$)

<u>Théorème :</u> La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

Exemple : Soit $f(x) = 3x^4 + 2x^6$

Alors $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3x^4 + 2x^6\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3x^4\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^6\right)$

2) **Multiplication par un scalaire** ($Axy = A(xy)$)

<u>Théorème :</u> La dérivée d'une fonction multipliée par un scalaire est égale à la dérivée de la fonction que l'on multiplie par la suite par le scalaire.

Exemple : Soit $f(x) = 7x^3$ $\qquad$ $f(x) = -2x^{-7}$

Alors $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(7x^3\right) = 7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3\right)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-2x^{-7}\right) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-7}\right)$

3) **Règle du polynôme** ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$)

<u>Théorème :</u> Le résultat de la dérivée d'un polynôme x^n est égal à nx^{n-1}.

Exemple : Soit $f(x) = x^{12}$ $\qquad$ $f(x) = x^{-2}$

Alors $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{12}\right) = 12x^{11}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-2}\right) = -2x^{-3}$

Situation A : ***Mon premier polynôme à dériver.*** On désire effectuez la dérivée du polynôme suivant : $f(x) = 4x^2 + \frac{5}{x^3} + 6x + 8$.

Effectuons une reformulation du polynôme : $f(x) = 4x^2 + 5x^{-3} + 6x^1 + 8x^0$

<u>Étape 1 :</u> $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^{-3}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(6x^1\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(8x^0\right)$

<u>Étape 2 :</u> $f'(x) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-3} + 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^1 + 8\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^0$

<u>Étape 3 :</u> $f'(x) = 4\left(2x^1\right) + 5\left(-3x^{-4}\right) + 6\left(1x^0\right) + 8\left(0x^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x) = 8x - 15x^{-4} + 6}$

Exercices

Exercice A : ***La dérivée de polynôme à une variable.*** Évaluez la dérivée par rapport à x des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 5x^4$ b) $f(x) = 4x^2 + 7x^6$

Exercice B : ***La dérivée de polynôme à deux variables.*** Évaluez la dérivée suivante :

a) $\dfrac{\mathrm{d}(4x^2 y)}{\mathrm{d}x}$ b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{8y^2}{x^2} + 7x^4 y^2\right)$

P.S. Lors d'une dérivée par rapport à x ($\mathrm{d}f / \mathrm{d}x$), tous les paramètres sauf x sont des constantes.

Solutions

Exercice A : ***La dérivée de polynôme à une variable.***

a) $f'(x) = 20x^3$ b) $f'(x) = 8x + 42x^5$

Exercice B : ***La dérivée de polynôme à deux variables.***

a) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 8xy$ b) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{18}{x^4} + \dfrac{16y^2}{x^3} + 28x^3 y^2$